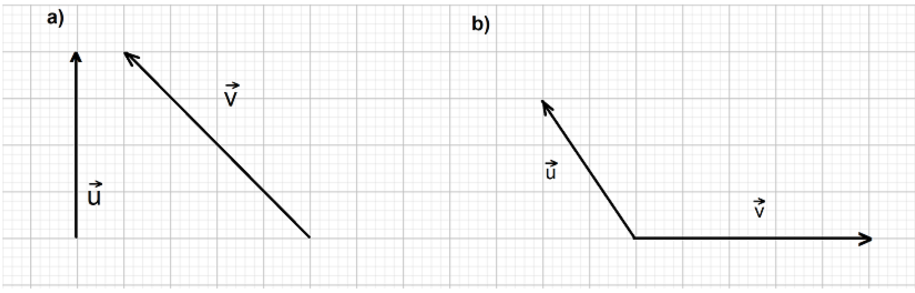
VECTEURS

Construction de points et somme de vecteurs
Coordonnées
Colinéarité de deux vecteurs et points alignés
Calculs avec des vecteurs

Construction de points et somme de vecteurs

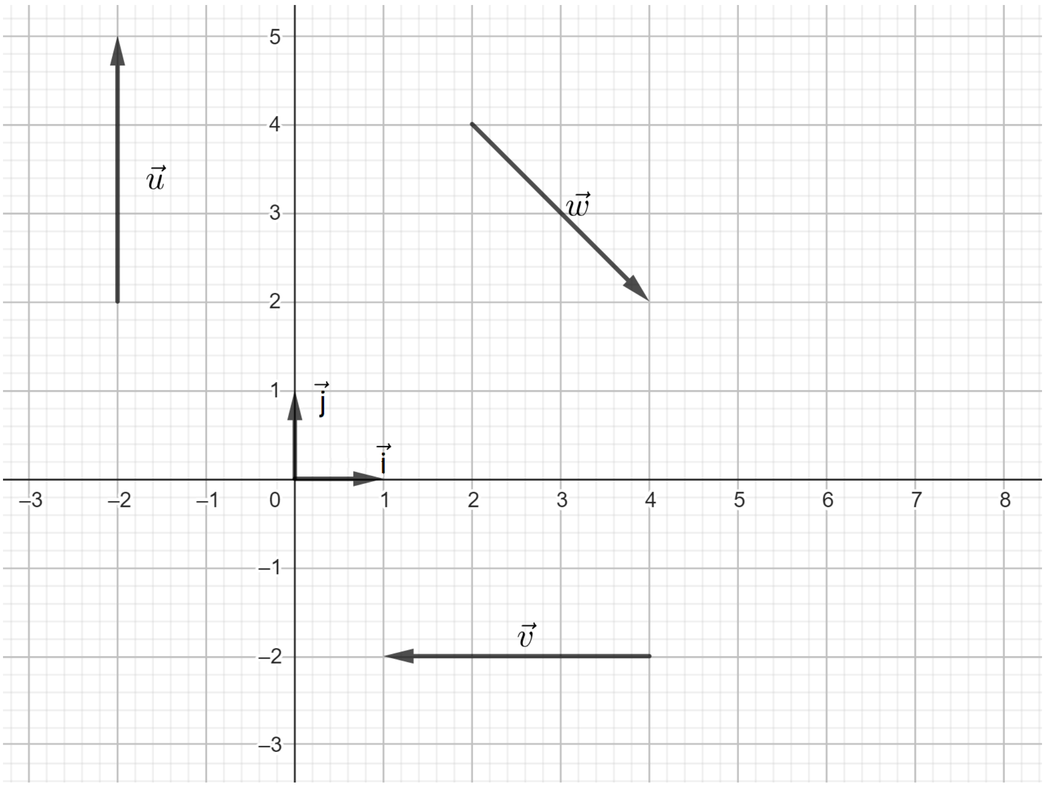
Exercice 1 : solution

Dans chaque cas ,
construire les vecteurs :
$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$.



Exercice 2 : solution

On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de la figure ci-contre :

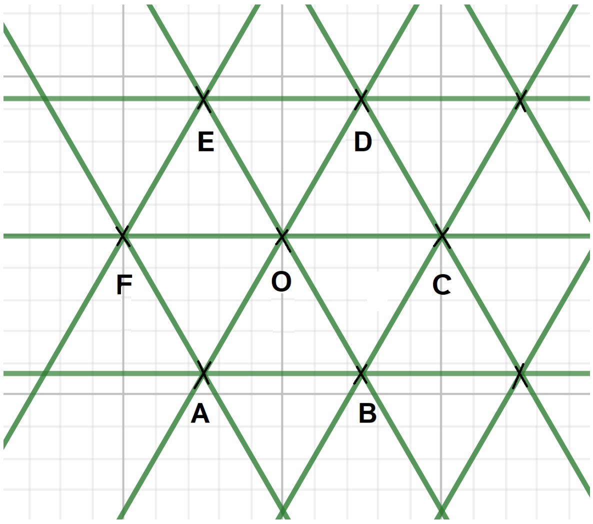


Construire les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$, $\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}$.

Exercice 3 : solution

ABCDEF est un hexagone régulier (côtés et angles égaux) de centre O. On admet que OABC, OBCD, OCDE, ODEF et OEFA sont des parallélogrammes.

1) Déterminer l'image de O par la translation
   a) qui transforme F en E.
   b) de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2) Déterminer l'image de F par la translation
   a) qui transforme A en C
   b) de vecteur $\overrightarrow{EC}$



Exercice 4 : solution

Soit un triangle ABC.

1) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
2) C' et B' étant les milieux respectifs de $[A,B]$ et $[A,C]$. Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$.

Exercice 5 : solution

Soit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

1) Quelle est la nature du parallélogramme ABCD ?
2) Montrer que $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$.
3) Calculer $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
4) Soit O l'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD. Calculer $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

Exercice 6 : solution cned

Soient ABCD un parallélogramme, I est le milieu de [CD] et A' le symétrique de A par rapport à I.

1) Montrer que ACA'D est un parallélogramme.
2) En déduire que C est le milieu de [A'B].

Exercice 7 : solution cned

Les quadrilatères ABCD et ABEF sont des parallélogrammes. Montrer que CDFE est un parallélogramme.

Exercice 8 : solution cned

Soient ABCD et AECF deux parallélogrammes. Montrer que BFDE est un parallélogramme.

Exercice 9 : Cned solution cned

Soient O, A, B trois points du plan. On note, de plus, A‘ et B‘ les symétriques respectifs de A et B par rapport à O. Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$.

Exercice 10 : solution cned

Le plan est muni d‘un repère (O, I, J). On considère A (-4 ; 2), B (2 ; 1) et C (0 ; 3).
Déterminer les coordonnées de D , image de C par la translation qui transforme
A en B.

Exercice 11 : solution cned

Soient ABCD un parallélogramme, I le milieu de [AB]. L‘image de C et D par la symétrie de centre I sont notés C‘ et D‘ respectivement. Montrer que ABD‘C‘ est un parallélogramme.

Exercice 12 : solution cned

Le plan est muni d‘un repère (O, I, J). On considère A (-6 ;-3), B (1 ;-1), C (2 ; 4) et
D (-5 ; 2). Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice 13 : solution cned

Le plan est muni d‘un repère (O, I, J). On considère A (-6 ; 1), B (-3 ;-1) et C (2 ; 1).
Déterminer les coordonnées de D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Exercice 14 : solution cned

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Montrer que :

1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$.
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 0$.
3) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$

Exercice 15 :

Calculer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$.

Exercice 16 : solution

Soient trois points quelconques, O , A et B. Construire le point C tel que :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \quad .$$

Exercice 17 : solution

Soient quatre points quelconques, O , A , B et C. Construire le point D tel que :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0} \quad .$$

Exercice 18 : solution

Soient deux droites D et D' sécantes en en O et un point A . Trouver un point B de D et un point B' de D' tels que $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'}$.

Exercice 19 : solution

Soient quatre points quelconques, A , B , C et D.

1) Construire le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
2) Construire le point N tel que : $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.
3) Construire le point P tel que : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AD}$.

Exercice 20 : solution

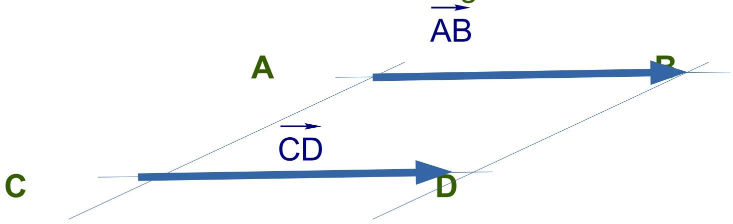
Soient quatre points quelconques, O, A , B et C.

1) Construire le point M tel que : $\overrightarrow{OM}=2\,\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$.
2) Construire le point N tel que : $\overrightarrow{ON}=4\,\overrightarrow{OA}-3\,\overrightarrow{OB}$.
3) Construire le point P tel que : $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\,\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.
4) Construire le point Q tel que : $\overrightarrow{OQ}=3\,\overrightarrow{OA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}-2\,\overrightarrow{OC}$.

Exercice 21 : **Démonstration d'une Propriété .** solution

Démontrer la propriété suivante :

Soient quatre points A, B, C et D.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si AB**D**C est un parallélogramme.

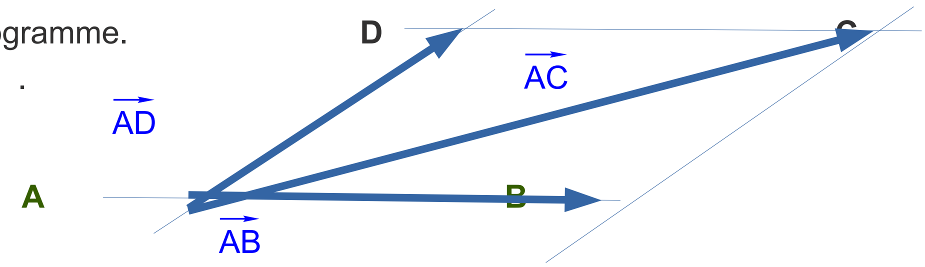


(attention à l'ordre : ABDC)

Exercice 22 : **Démonstration de la Propriété : Règle du parallélogramme** solution

Démontrer la propriété suivante (Règle du parallélogramme) :

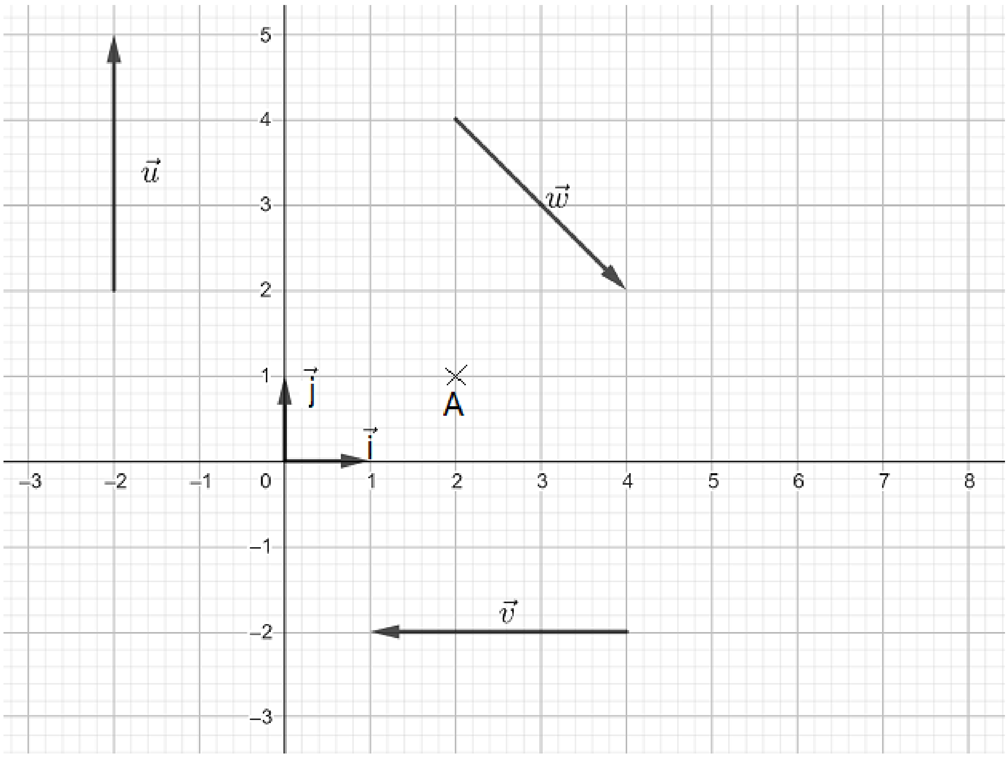
Soit ABCD un parallélogramme.
Alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



Coordonnées

Exercice 23 : solution

On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de la figure ci-contre :



1) Lire, sans calculs, les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2) Construire le point B tel que ait pour coordonnées (2 ; -1).

Exercice 24 : solution cned

Dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J), on considère les points A (-3 ; -3), B (2 ; 1), C (3 ; 4) et D (-2 ; 0).

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs AB et DC .
2) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice 25 : solution

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $2\vec{u}-3\vec{v}$.

Exercice 26 : solution

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Calculer $3\vec{u}$, $-\sqrt{2}\vec{v}$, $3\vec{u}-\sqrt{2}\vec{v}$.

Exercice 27 : solution

Soit un repère (O, I, J). On fixe les points : A $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$; D $\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ et E $\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EB}$ et exprimer ces vecteurs en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

Exercice 28 : solution

Soit un repère (O, I, J). On fixe les points : A $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$.
2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
3) Calculer les coordonnées des points A' , B' et C' , milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Exercice 29 : solution

Dans le repère (O, I, J) on fixe les points : A $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

1) Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2) Calculer les coordonnées du centre de symétrie de ce parallélogramme.

Exercice 30 : solution

Dans le repère (O, I, J), soient le point A $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$.

Exercice 31 : solution

Dans le repère (O, I, J) on fixe les points : A $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

1) Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CD}=3\,\overrightarrow{AB}$.
2) Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{BE}=\frac{-3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 32 : solution cned

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On définit les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ par :

$\vec{a}=2\,\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ $\quad\vec{b}=\vec{u}-3\,\vec{v}$ $\quad\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{u}-\vec{v}$

. Trouver des réels x et y tels que : $\vec{c}=x\,\vec{a}+y\,\vec{b}$.

Colinéarité de deux vecteurs et points alignés

Exercice 33 : **Démonstration de la Propriété : Critère de colinéarité** solution

Démontrer la propriété suivante (Critère de colinéarité) :

1) Deux vecteurs $\vec{u}(x\,,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ (non nuls) dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k (non nul) tel que :
$x = k\ x'$ et $y = k\ y'$.
2) Deux vecteurs $\vec{u}(x\,,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ (non nuls) dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - y\,x' = 0$.

Exercice 34 : solution

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $2\vec{u}+3\vec{v}=\vec{0}$. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 35 : solution

Dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires . Dans l'affirmative déterminer le réel *k* tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

Exercice 36 : solution cned

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points A (1,5 ; 4), B (4,5 ; 5), C (5 ; 1,5) et D (0,5 ; 0).

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2) Que peut-on en déduire ?

Exercice 37 : solution cned

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points A (-1 ; 2), $B\left(\frac{1}{3};4\right)$ et C (1 ; 5).

Montrer que A, B et C sont alignés.

Exercice 38 : solution cned

Déterminer dans chaque cas si les vecteurs sont colinéaires ou non. Le cas échéant, donner une relation de colinéarité liant les deux vecteurs.

1) $\vec{u}(8;13)$ et $\vec{v}(5;8)$
2) $\vec{u}(-4;6)$ et $\vec{v}(20;30)$
3) $\vec{u}(-4;6)$ et $\vec{v}(18;-27)$
4) $\vec{u}(0,4;0,6)$ et $\vec{v}(1,4;1,6)$
5) $\vec{u}(0;6)$ et $\vec{v}(2;0)$
6) $\vec{u}\left(\frac{1}{2};6\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{3};4\right)$

Exercice 39 : solution cned

On se place dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points
A (-2, 1 ; 3,2), B (-0,9 ; 4), C (3,7 ; 7) et D (5,8 ; 8,4). Montrer que : (AB) // (CD).

Exercice 40 : solution cned

On se place dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J). Dans chacun des cas suivants, les points A, B et C sont-ils alignés ?

A (-2 ; -3), B (3 ; 5), C (6 ; 10).
A (-3 ; -2), B (1 ; 4), C (3 ; 7).
A (0 ; -1), B (3 ; 3), C (9 ; 11

Exercice 41 : solution

Soient trois points A, B et C , alignés ou non, et soient I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. Démontrer que $\vec{BC} = 2\vec{IJ}$.

Exercice 42 : solution

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\m\end{pmatrix}$. Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ soient colinéaires. Déterminer alors le réel *k* tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Exercice 43 : solution

Dans le repère (O, I, J). On fixe les points : A $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et D$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 44 : solution

Dans le repère (O, I, J) on fixe les points : A $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

1) Déterminer le point D de la droite (OI) tel que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ soient colinéaires.
2) Déterminer le point E tel que les vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{AC}$ soient colinéaires et que le milieu du segment $[BE]$
soit sur la droite (OJ).

3) Déterminer le point F dont les deux coordonnées sont égales et tel que les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient colinéaires.
4) Déterminer le point G tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$ soient colinéaires et que le milieu du segment $[CG]$ ait des coordonnées opposées.

Exercice 45 : solution

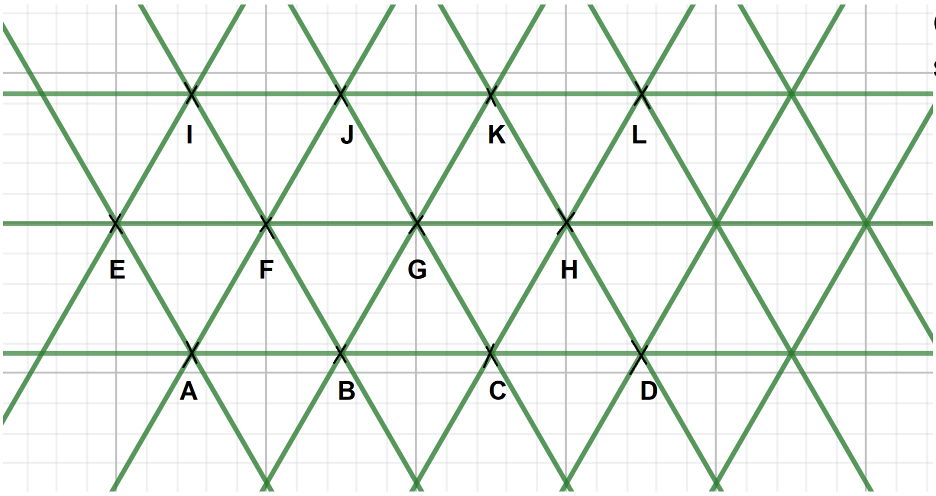
Dans le repère (O, I, J) on fixe les points : A $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$.

1) Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2) Montrer que les points A, B et C sont-ils alignés .
3) Soit le point $M\begin{pmatrix}-2\\x\end{pmatrix}$ du plan. Quelle valeur x doit-il prendre pour que M appartienne à la droite (AB) ?

Calculs avec des vecteurs

Exercice 46 : solution

On considère la figure ci-dessous constitué de triangles équilatéraux. Les points A, B,…, L sont des sommets des précédents triangles.



Compléter les égalités suivantes :

1) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{A\ldots}$
2) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{A\ldots}$
3) $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GE}=\ldots$.
4) $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{E\ldots}$

Exercice 47 : solution

Soient deux parallélogrammes, ABCD et ABC'D' , dont le côté $[AB]$ est commun. Montrer que CDD'C' est un parallélogramme.

Exercice 48 : solution

Soient deux parallélogrammes, ABCD et AB'CD' , dont la diagonale $[A, C]$ est commune. Montrer que BB'DD'' est un parallélogramme.

Exercice 49 : solution

On désigne par O le milieu du segment $[A, B]$. Soit M un point quelconque du plan.

1) Montrer que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}$.
2) C et D étant deux points de la droite (AB), montrer que, si $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$, les milieux des segments [A , B] et [C,D] coïncident.

Exercice 50 : solution

Soit O le centre d'un parallélogramme ABCD.

1) Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
2) M étant un point quelconque du plan, montrer que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Exercice 51 : solution

Soit un triangle ABC.

1) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.
2) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
3) Montrer que C et D sont symétriques par rapport à A.

Exercice 52 : solution

On désigne par G le centre de gravité d'un triangle ABC .

1) Montrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
2) M étant un point quelconque montrer que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.
3) Existe-t-il un point G' , différent de G , tel que $\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$.

Exercice 53 : solution

Soient trois points A, B et C du plan. On désigne par D et E les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. Comparer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 54 : solution

Soient deux parallélogrammes ABCD et AB'CD' dont les points A et C sont communs. Monter que BB'DD' est un parallélogramme.

Exercice 55 : solution

Soient les points A,B et M du plan. On considère les points A' et B' définis par :
$\overrightarrow{MA'}=\frac{1}{k}\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB'}=\frac{1}{k}\overrightarrow{MB}$, $k\in \mathbb{R}^*$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 56 : solution

Soient A, B, C et D quatre points du plan. Démontrer la relation :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Exercice 57 : solution

Soient quatre points distincts quelconques A, B, C et D , le point M de la droite (AB), le point N de la droite (CD), tels que : $\overrightarrow{MA}=k\,\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NC}=k\,\overrightarrow{ND}$, $k\neq 1$.
Montrer que : $\overrightarrow{AC}-k\,\overrightarrow{BD}=(1-k)\,\overrightarrow{MN}$.

Exercice 58 : solution

Soient O, A et B trois points du plan. Déterminer l'ensemble des points M définis par :
$\overrightarrow{OM}=\lambda\,\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\,\overrightarrow{OB}$.

Exercice 59 : solution

Soient trois points A, B et C non alignés du plan et le point M défini par $2\,\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.
Montrer que la droite (AM) passe par le milieu de la médiane $[BB']$ du triangle ABC.

Exercice 60 : solution

Soient trois points A, B et C non alignés du plan.

1) Montrer qu'il existe un point unique G du plan défini par : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
2) En déduire que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\,\overrightarrow{MG}$.

Exercice 61 : solution

Soient trois points A, B et C du plan et trois réels a, b et c fixés. Montrer que si a+b+c ≠ 0, il existe un point G unique du plan tel que : $a\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{GB}+c\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
.

Exercice 62 : solution

Soient trois réels a, b et c non tous nuls, dont la somme est nulle et trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

tels que : $a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Montrer que les points A, B et C sont alignés.Réciproque.

Exercice 63 : solution

Soient trois points A, B et C non alignés du plan.

1) Montrer que la relation $\overrightarrow{MB} = k\,\overrightarrow{MC}$ définit un unique point M du plan, si *k* est un réel différent de 1.
2) On définit de même N et P : $\overrightarrow{NC} = k'\,\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = k''\,\overrightarrow{PB}$.
   Exprimer $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) M Si les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires , quelle relation existe-t-il entre les réels k, k' et k'' ?

Exercice 64 : solution

Soit un triangle ABC et A', B' et C' les milieux respectifs des côtés BC, CA et AB.

1) Exprimer BB' et CC' en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Soient le point M de la droite (BB') et le point N de la droite (CC'), tels que $\overrightarrow{BM} = \lambda\,\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CN} = \mu\,\overrightarrow{CC'}$.
   Exprimer $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ en fonction de λ, μ, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Déterminer λ et μ pour que M=N. Exprimer dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   Comparer ce vecteur à $\overrightarrow{AA'}$.

Exercice 65 : solution cned

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points A(–1 ; 1), B(1 ; 2), C (3 ; 2) et D (1 ; 3).

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) Déterminer les coordonnées du point E défini par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
3) Montrer que les points A, B et E sont alignés.

Exercice 66 : solution cned

Dans le repère (O ; I ; J) on donne les points A(–5 ; –3), B(–2 ; –1) et C (4 ; 3).

1) Placer ces points dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. Montrer que les points A, B, C sont alignés.
2) La droite (AB) passe-t-elle par le point O ?

3) Un point D de (AB) a pour abscisse 3. Quelle est son ordonnée ?
4) Un point E de (AB) a ses deux coordonnés égales. Quelles sont ses coordonnées ?

Exercice 67 : solution cned

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). On considère les points A(–1 ; –1), B(4 ; 2), C(6 ; 6), D(1 ; 4) et E(3 ; 9). De plus, F est le milieu de [AB] et G vérifie : $\overrightarrow{GC}+2\,\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

1) Montrer que D est le milieu de [AE].
2) Déterminer les coordonnées de F.
3) Déterminer les coordonnées de G.
4) Montrer que les droites ((BE) et (DF) sont parallèles.

Exercice 68 : solution cned

Soient ABC un triangle, D_1 est la parallèle à (BC) passant par A, D_2 la parallèle à (AC) passant par B et D_3 la parallèle à (AB) passant par C.
On définit de plus, A' = $D_2 \cap D_3$ (donc A' est l'intersection des droites #2 et #3),
B'= $D_1 \cap D_3$ et C'= $D_1 \cap D_2$.

1) Quelle est la nature du quadrilatère BCB'A ?
2) Montrer que A est le milieu de [B'C'].
   On montre alors, de même, que B est le milieu de [A'C'] et C le milieu de [A'B'].

Exercice 69 : solution cned

Soit ABC un triangle (non aplati). Les points M, N, P sont définis par :
$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, N est le milieu de [AC] et P est le symétrique de B par la symétrie de centre C.

1) Faire la figure.
2) Montrer que : $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}$. On se place dans le repère (A ; B ; C).
3) Donner les coordonnées des points A, B et C.
4) Déterminer les coordonnées des points M, N et P.
5) Montrer que M, N et P sont alignés.

Exercice 70 : solution cned

Soient ABC un triangle (non aplati), M et N les points définis par : $\overrightarrow{AN}=2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On se propose de montrer de deux façons différentes que A, M et N sont alignés.

1) *Avec un repère*. On se place dans le repère (A, B, C).
   a) Déterminer les coordonnées de A, B, C et N.

b) Déterminer les coordonnées du point M.

c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$.

d) Conclure.

2) Calculs vectoriels.

a) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. Conclure

Exercice 71 : solution cned

Soient ABC un triangle, M et N définis par : $\overrightarrow{AM}=3\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}=3\,\overrightarrow{BC}$.
Montrer que A, C et N sont alignés.

Exercice 72 : solution cned

Soient A et B deux points du plan et I le milieu de [AB]. Montrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\,\overrightarrow{MI}$.

Exercice 73 : solution cned

Soient ABC un triangle et M un point tel que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\,\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Soit I le milieu de [AB]. Montrer que M est le milieu de [IC]

Exercice 74 : solution

Soient ABC un triangle, A‘, B‘ et C‘ les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] et G le centre de gravité du triangle ABC.

1) Montrer que A‘ est le milieu de [GG‘].
2) Montrer que :
   a) G est le milieu de [AG‘].
   b) La médiane (CC‘) passe aussi par G.
3) En déduire que : $\overrightarrow{GA}=-2\,\overrightarrow{GA'}$ puis que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
4) Montrer, alors, que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$ (La réciproque est aussi vraie.)

Exercice 75 : solution cned

Soient ABC un triangle. Montrer que le centre de gravité G du triangle ABC est le seul point tel que :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$$

Exercice 76 : solution cned

On rappelle que si G est le centre de gravité du triangle ABC alors : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$
On se place dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J). Soient A (-2 ; -3), B (3 ; -1) et C (2 ; 7).
Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.