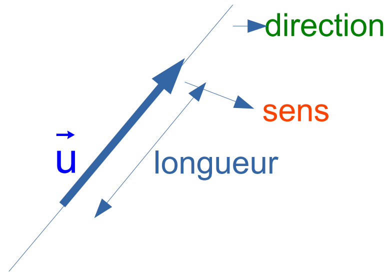
VECTEURS

1) Définitions

Définition

Un vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par sa **direction**, sons **sens** et sa **longueur**, appelée norme de $\vec{u}$ et notée $\|\vec{u}\|$.

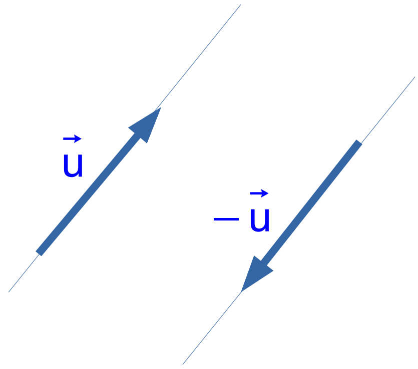
Un vecteur $\vec{u}$ peut être défini par deux points A et B, tels que A soit l'image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$.



$\vec{0}$ appelé vecteur nul, n'a ni direction, ni sens et une longueur nulle.

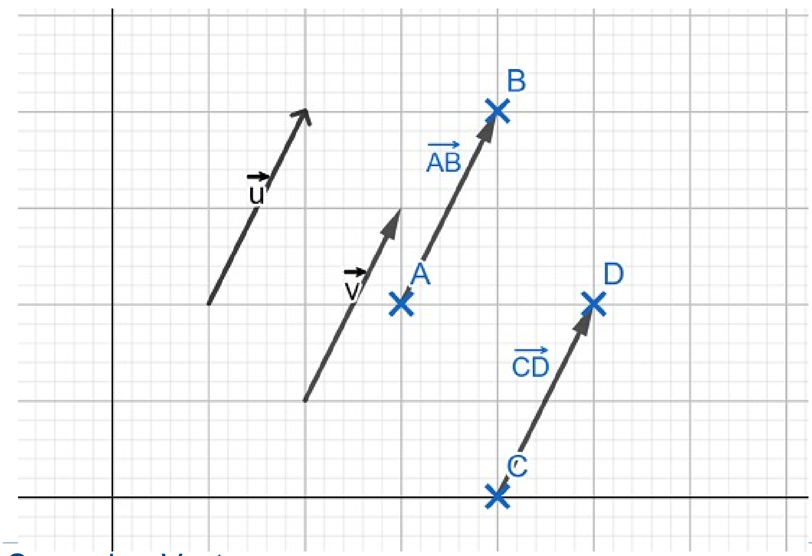
Définition

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$, noté $\overrightarrow{-u}$ est le vecteur qui a même direction et même longueur que $\vec{u}$, mais un sens opposé à celui de $\vec{u}$.



Définition

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.



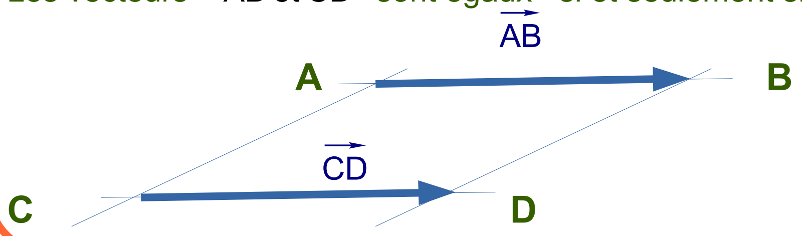
Tous les vecteurs représentés sont égaux :

$$\vec{u} = \vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

(Car ils ont tous même direction, même sens et même longueur.

Propriété

Soient quatre points A, B, C et D.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme.



(attention à l'ordre : ABDC)

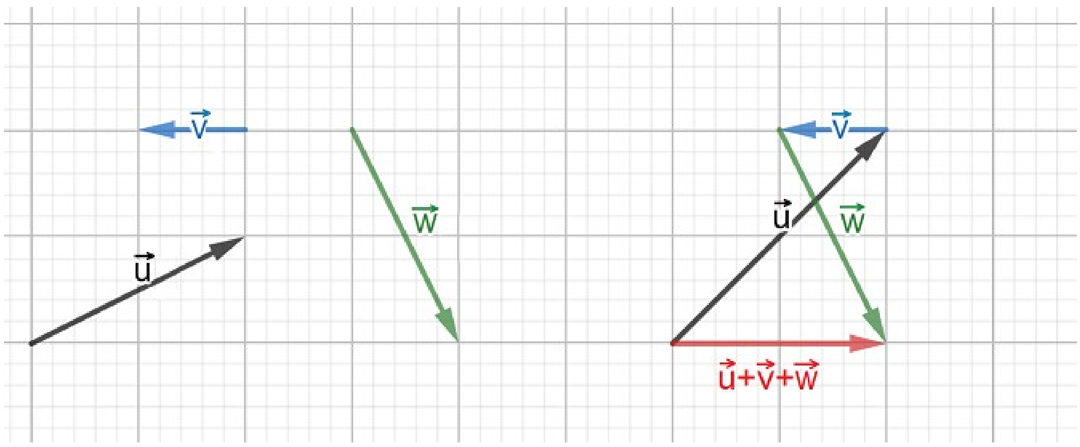
démonstration : voir exercice

2) Opérations sur les vecteurs

Définition : Addition de vecteurs

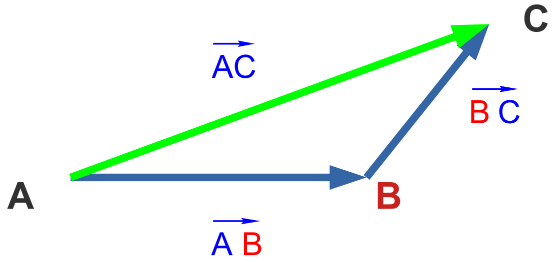
La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.
On note ce vecteur : $\vec{u} + \vec{v}$.

Exemple : Pour additionner les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on les dispose bout à bout et on « relie » le tout début de la fin :



Propriété : Relation de Chasles

Soient trois points A, B et C.
Alors on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Propriété

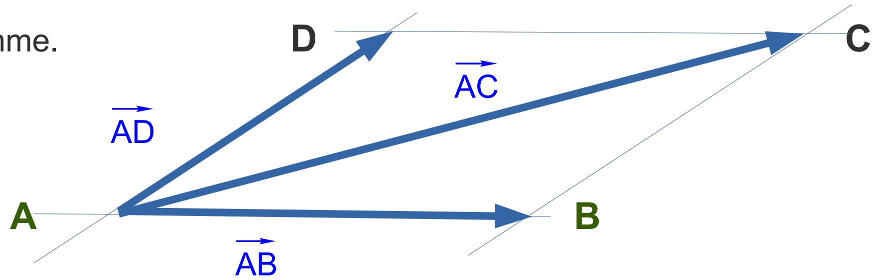
Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ *(on dit que l'addition des vecteurs est commutative)*
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ *(on dit que* $\vec{0}$ *est élément neutre pour l'addition des vecteurs)*
- $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{v})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}$ *(on dit que l'addition des vecteurs est associative)*

Propriété : Règle du parallélogramme

Soit ABCD un parallélogramme.

Alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



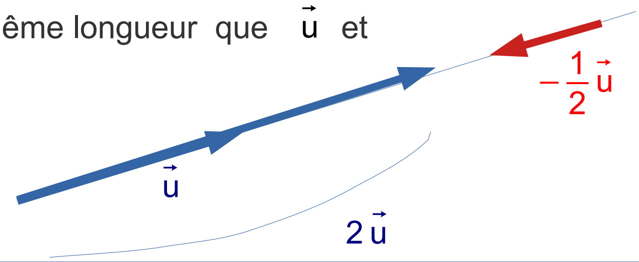
démonstration : voir exercice

Définition : Multiplication d'un vecteur par un réel

Soient $\vec{u}$ un vecteur et un réel $k \neq 0$.

$k\vec{u}$ est le vecteur ayant même direction et même longueur que $\vec{u}$ et

- de même sens que $\vec{u}$ si **k > 0** .
- de sens contraire à $\vec{u}$ si **k < 0** .



On a : $0\vec{u}=\vec{0}$ et $k\vec{0}=\vec{0}$

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels k et k' :

- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$

Propriété

Soit un vecteurs $\vec{u}$ et un réels k. Alors :

$k\vec{u}=0 \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u}=0$

Définition : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **non nuls** sont colinéaires s'il existe un réel k **non nul** tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

($\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction)

Propriété : Parallélisme

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété : Points alignés

Soient A, B et C trois points distincts du plan.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2) Coordonnées d'un vecteur

Définition : Repère orthonormé

Un repère orthonormé du plan est un triplet $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où O, appelé origine du repère, est un point du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs **non colinéaires**.

(le couple $(\vec{i}; \vec{j})$ est appelé base).

- Pour tout point M ou peut écrire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où x et y sont **UNIQUES**.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ ou peut écrire $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où x et y sont **UNIQUES**.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et tout réel k :

- $\vec{u}(x, y) = \vec{v}(x', y')$ si et seulement si x = x' et y = y'.
- $\vec{u}(x, y) + \vec{v}(x', y')$ a pour coordonnées (x + x' , y + y').
- $k\vec{u}(x, y)$ a pour coordonnées (kx, ky) .

Propriété

Soient deux points A (x_A , y_A) et B (x_B , y_B) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Alors , les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A , y_B - y_A\right)$.

(coordonnées du 2ème point **–** coordonnées du 1er point).

Propriété : Critère de colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}(x , y)$ et $\vec{v}(x' , y')$ (non nuls) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k (non nul) tel que :

$x = k\ x'$ et $y = k\ y'$.

démonstration : voir exercice

Remarque : **Critère de colinéarité** qui sera vu plus tard dans le programme :
Deux vecteurs $\vec{u}(x , y)$ et $\vec{v}(x' , y')$ (non nuls) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - y\,x' = 0$.

démonstration : voir exercice