PROBABILITÉS

Définitions
Probabilités sur un ensemble fini

1) Définitions

Définitions :

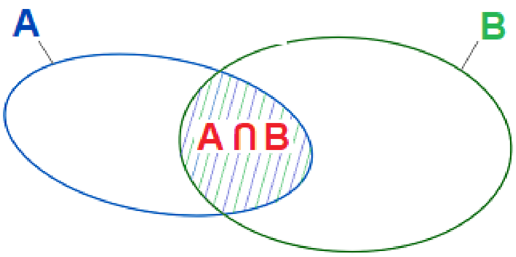
Expérience aléatoire : c'est une expérience pour laquelle sont possibles plusieurs résultats , appelés aussi issues (ou éventualités).
Univers Ω : C'est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire , noté Ω *(Ω : oméga)* .
Évènement : C'est un sous-ensemble de l'univers Ω .
Évènement élémentaire : C'est un évènement constitué d'une seule éventualité.

Exemple : Expérience aléatoire **:** Lancer d'un dé à 6 faces
Les issues sont : 1,2,3,4,5,6
Univers Ω : Ω ={1,2,3,4,5,6}
Évènement A : "obtenir un nombre pair" A={2,4,6}
Évènement B : "obtenir un nombre impair" B={1,3,5}
Évènement C : "obtenir un multiple de 3" B={3,6}

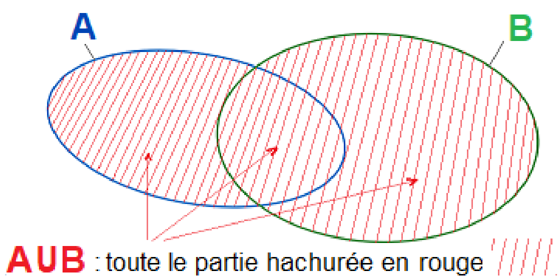
Définition :

Soient A et B deux événements.

L'intersection de A et B, notée A ∩ B , est l'événement constitué des issues qui appartiennent à la fois à A et à B.



La réunion de A et B, notée A U B , est l'événement constitué des issues qui appartiennent à la fois à A ou à B.



Exemple : dans l'exemple ci-dessus, l'évènement A ∩ C est A ∩ C = {6} et l'évènement A ∪ C est A ∪ C = {2,4,6} U {3,6} = {2,3,4,5,6} .

Définition :

Événements incompatibles : Deux évènements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser simultanément, c'est-à-dire si : $A \cap B = \emptyset$.

Événement contraire : On appelle événement contraire de A, noté $\overline{A}$, l'évènement constitué par toutes les éventualités de l'univers Ω qui n'appartiennent pas à A.

On a : , $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

(On dit aussi que les événements A et $\overline{A}$ sont compléméntaires).

Exemple : dans l'exemple ci-dessus, les évènements A et B sont incompatibles, car $A \cap B = \emptyset$.
Ils sont même contraires car : $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

2) Probabilités sur un ensemble fini

Définition : Loi de probabilité sur un ensemble fini

On dit qu'on définit une loi de probabilité P sur l'univers $\Omega=\{e_1 , e_2 ,\dots, e_n\}$ d'une expérience aléatoire ayant un nombre fini d'éventualités si :

À chaque éventualité e_i , on associe le réel p_i tel que :

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = p_1+p_2+\dots+p_n = 1 \quad (\text{ On note : } P(e_i)=p_i)$$

Propriété :

La probabilité d'un événement A, notée P(A), est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent . On a alors :

$P(\Omega) = 1$ et on pose : $P(\emptyset) = 0$.

Propriété :

Lorsque tous les évènements élémentaires de l'univers Ω ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité sur Ω.
Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$p(A)=\frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre total d'issues de }\Omega} .$$

démonstration : voir exercice

Propriété :

Si A et B sont deux événements incompatibles $(A \cap B = \emptyset)$, alors :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

démonstration : voir exercice

Propriété :

Pour tous les événements A et B (A et B quelconques), on a :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

démonstration : voir exercice

Propriété :

Soit un événement A et $\overline{A}$ son événement contraire. On a :
$P(\overline{A}) + P(A) = 1$ ou encore : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

démonstration : voir exercice